

УДК 517.9

М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН В КРУГЛЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ

Аннотация. Изучается задача о распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Задача сводится к нелинейной задаче на собственные значения для нелинейной интегральной оператор-функции. Для решения используется метод сжимающих отображений. Представлены численные результаты расчетов.

Ключевые слова: нелинейная среда, распространение электромагнитных волн в волноводе, задача на собственные значения, интегральные уравнения, численный метод.

Abstract. Problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in nonlinear dielectric waveguide with circular cross-section is considered. Waveguide filled nonlinear media with Kerr law. The problem is reduced to the nonlinear eigenvalue problem for integral operator-function. Contraction type principle is used for solving the problem. Numerical results are presented.

Keywords: nonlinear media, propagation of electromagnetic waves in waveguides, eigenvalue problems, integral equations, numerical methods.

Введение

Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или в волноведущей структуре с нелинейной средой, описываемой по закону Керра, активно исследуется в течение последних двух десятилетий [1, 2]. Эффекты самофокусировки и «самоканализации» луча в лазерах и оптоэлектронных устройствах также изучаются и применяются на практике [3]. При распространении резко неоднородной волны – «луча» лазера, в определенных условиях волновому процессу сопутствует образование канала, направляющего его энергию. В этом случае процесс распространения волны происходит подобно распространению волны в диэлектрическом волноводе с нелинейной средой, описываемой по закону Керра. Распространение ТЕ-поляризованных волн в диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой, подробно исследовано в [2, 4–6]. В этих работах были получены аналитические результаты о существовании распространяющихся волн в волноводе, о локализации постоянных распространения, о сходимости итерационного метода сжимающих отображений. Также были представлены численные результаты расчетов постоянных распространения в зависимости от различных параметров.

В данной статье изучаются ТМ-поляризованные электромагнитные волны, распространяющиеся в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к нелинейной задаче на собственные значения для нелинейной интегральной оператор-функции.

Для решения используется метод сжимающих отображений. Строится итерационный алгоритм, с помощью которого определяются значения собственных функций и спектрального параметра при соответствующих краевых условиях. Представлены численные результаты расчетов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть пространство R^3 заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = \text{const}$. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод однородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz , и поперечным сечением $W = \{x : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$.

Будем предполагать гармоническую зависимость полей от времени в виде [1]

$$\hat{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{E}}^+(x, y, z) \cos \omega t + \hat{\mathbf{E}}^-(x, y, z) \sin \omega t ;$$

$$\hat{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{H}}^+(x, y, z) \cos \omega t + \hat{\mathbf{H}}^-(x, y, z) \sin \omega t ,$$

где ω – круговая частота; $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{E}}^+, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{H}}^-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}(x, y, z), \mathbf{H}(x, y, z)$ по формулам

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}^+ + i\hat{\mathbf{E}}^- ;$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}^+ + i\hat{\mathbf{H}}^- .$$

Везде ниже множители $\cos \omega t, \sin \omega t$ будем опускать.

Пусть диэлектрическая проницаемость ε внутри волновода определяется по закону Керра:

$$\varepsilon = (\varepsilon_2 + a|E|^2)\varepsilon_0 ,$$

где a и ε_2 – вещественные положительные константы. Здесь ε_2 – постоянная составляющая проницаемости ε ; a – коэффициент нелинейности. Среда предполагается изотропной и немагнитной, $\mu = \mu_0$.

Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т.е. собственные волны структуры. Электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля $\mathbf{H}_\tau$ и $\mathbf{E}_\tau$ при переходе через границу волновода и условиям экспоненциального затухания поля на бесконечности.

Перейдем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) . Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho; \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi; \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = i\omega\mu H_z; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega\epsilon E_\rho; \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon E_\varphi; \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega\epsilon E_z. \quad (7)$$

В случае ТМ-поляризации предположим, что $\mathbf{E} = (E_\rho, 0, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)$. Тогда из уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат следует, что $E_z = E_z(\rho, z)$ и $E_\rho = E_\rho(\rho, z)$ не зависят от φ .

2. Сведение к нелинейной краевой задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн с зависимостью $\exp(i\gamma z)$ от продольной координаты, где γ – вещественная постоянная распространения волны.

Внутри волновода полагаем, что $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \tilde{\epsilon}\epsilon_0$, где ϵ_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства; $k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$, k_0 – волновое число свободного пространства.

Из уравнений Максвелла, учитывая ТМ-поляризацию, получим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu_0 H_\varphi, \\ \gamma H_\varphi = \omega\epsilon_0 \tilde{\epsilon} E_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi) = -i\omega\epsilon_0 \tilde{\epsilon} E_z. \end{cases} \quad (8)$$

Выражая из первого уравнения системы H_φ и подставляя его во второе и третье уравнения, приходим к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \gamma^2 E_\rho + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = k_0^2 \tilde{\epsilon} E_\rho, \\ i\gamma \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) = k_0^2 \tilde{\epsilon} E_z. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначая

$$E_\rho(\rho, \gamma, z) = u_1(\rho, \gamma) e^{i\gamma z}, \quad iE_z(\rho, \gamma, z) = u_2(\rho, \gamma) e^{i\gamma z} \quad (10)$$

и $k_2^2 = k_0^2 \epsilon_2 - \gamma^2$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -k_2^2 u_1 + \gamma u_2' = f_1, \\ -\gamma \cdot \frac{1}{\rho} (\rho u_1)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \epsilon_2 u_2 = f_2, \end{cases} \quad (11)$$

где производная обозначает дифференцирование по ρ и

$$f_1 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_1, \quad f_2 = k_0^2 a |\mathbf{u}|^2 u_2; \quad (12)$$

$$|\mathbf{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T. \quad (13)$$

Будем предполагать, что $u_1(\rho, \gamma), u_2(\rho, \gamma)$ – вещественные функции. Вне волновода решение имеет следующий вид [7]:

$$u_2 \equiv E_z = CK_0(k_1 \rho); \quad (14)$$

$$u_1 \equiv E_\rho = -\frac{\gamma}{k_1} CK_0'(k_1 \rho), \quad (15)$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \epsilon_1$, $C = \text{const}$, $K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz)$ – функция Макдональда.

Условия сопряжения на границе раздела сред:

$$[u_2] = 0, \quad [\tilde{\epsilon} u_1] = 0. \quad (16)$$

Спектральным параметром задачи является γ .

Сформулируем теперь краевую задачу на собственные значения, к которой свелась исходная задача о распространяющихся поверхностных волнах цилиндрического волновода. Требуется отыскать ненулевые, ограниченные и непрерывно-дифференцируемые на полубесконечном интервале $\rho > 0$ функции $u_1(\rho), u_2(\rho)$ и соответствующие собственные значения γ такие, что $u_1(\rho), u_2(\rho)$ удовлетворяют системе уравнений (11), соотношениям (14), (15), условиям сопряжения (16) и условиям экспоненциального убывания функций $u_1(\rho), u_2(\rho)$ на бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$.

3. Функция Грина и ее свойства

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (11). Из первого уравнения системы выражаем u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{k_2^2}(\gamma u_2' - f_1),$$

и подставляем во второе уравнение:

$$-\gamma \cdot \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{1}{k_2^2} (\gamma u_2' - f_1) \right)' - \frac{1}{\rho} (\rho u_2')' - k_0^2 \varepsilon_2 u_2 = f_2.$$

Оно приводится к дифференциальному уравнению второго порядка относительно u_2 :

$$Lu_2 \equiv (\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2 = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right), \quad (17)$$

где линейная часть $Lu_2 \equiv (\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2$ включает линейное слагаемое и производную второго порядка.

Уравнение (17) может быть переписано в виде

$$(\rho u_2')' + k_2^2 \rho u_2 = F, \quad 0 < \rho < R, \quad (18)$$

где $F(\rho) = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right).$

Построим функцию Грина для краевой задачи:

$$\begin{cases} LG = \delta(\rho - r), \\ G|_{\rho=0} - \text{ограничена}, G|_{\rho=R} = 0, \end{cases}$$

где дифференциальный оператор определяется формулой

$$L = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + k_2^2 \rho.$$

Функция Грина имеет вид [8]

$$G(r, \rho) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{(J_0(k_2 \rho) N_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R))}{J_0(k_2 R)}, & \rho \leq r \leq R, \\ \frac{(N_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R))}{J_0(k_2 R)}, & r \leq \rho \leq R. \end{cases} \quad (19)$$

Функция Грина существует при таких значениях параметров, что $J_0(k_2 R) \neq 0$.

4. Сведение краевой задачи к системе нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (11). Используя вторую формулу Грина, получаем представление решения внутри волновода:

$$u_2(r) = \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho + Ru_2(R-0) \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R); \quad (20)$$

$$u_1(r) = \frac{\gamma}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho - \frac{f_1(r)}{k_2^2} + \frac{\gamma R}{k_2^2} u_2(R-0) \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r}(r, R). \quad (21)$$

Вне волновода решение имеет вид (14), (15).

Условия сопряжения на границе раздела сред примут вид

$$[u_2] = 0; \quad (22)$$

$$\varepsilon_2 u_1|_{r=R-0} - \varepsilon_1 u_1|_{r=R+0} + au_1 |u|^2 \Big|_{r=R-0} = 0. \quad (23)$$

Легко видеть, что при умножении в (1) функций **E**, **H** на произвольную константу $C_0 \neq 0$ и коэффициента нелинейности a на C_0^{-2} система уравнений Максвелла не изменяется. Это обстоятельство дает возможность выбора дополнительного условия нормировки. Выберем условие нормировки в виде $C=1$, тогда $u_2(R-0) = K_0(k_1 R)$ и

$$\varepsilon_2 u_1|_{r=R-0} + au_1 |u|^2 \Big|_{r=R-0} = -\varepsilon_1 \cdot \frac{\gamma}{k_1} \cdot K_0'(k_1 R).$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение:

$$\Delta(\gamma) \equiv \varepsilon_2 u_1(R-0) + au_1(R-0) |u(R-0)|^2 + \varepsilon_1 \cdot \frac{\gamma}{k_1} \cdot K_0'(k_1 R) = 0. \quad (24)$$

Применяя условие $u_2(R+0) = u_2(R-0)$, получим систему

$$\begin{cases} u_1(r) = \frac{\gamma}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho - \frac{f_1(r)}{k_2^2} + \frac{\gamma R}{k_2^2} u_2(R+0) \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r}(r, R), \\ u_2(r) = \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho + Ru_2(R+0) \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R), \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{где } \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \left[-\frac{\gamma}{k_2^2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial \rho} \rho f_1 d\rho - \int_0^R G \rho f_2 d\rho \right].$$

После преобразований получим окончательный вид системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u_1(r) = -\frac{\gamma^2}{k_0^2 \varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{\gamma}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial r} \rho f_2 d\rho - \frac{1}{k_2^2} f_1(r) + h_1(r), \\ u_2(r) = -\frac{\gamma}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \int_0^R G \rho f_2 d\rho + h_2(r), \end{cases} \quad (26)$$

где $h_1(r) = \frac{\gamma R}{k_2^2} \frac{\partial^2 G(r, R)}{\partial \rho \partial r} K_0(k_1 R)$; $h_2(r) = R \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R) K_0(k_1 R)$.

Для представления системы в виде матричного оператора введем матрицу ядер:

$$K(\rho, r) = \|k_{mn}(r, \rho)\|_{m,n=1}^2 = -\rho \begin{bmatrix} q_{11} G_{\rho r} & q_{12} G_r \\ q_{21} G_{\rho} & q_{22} G \end{bmatrix}$$

(индексы обозначают частные производные) с матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} (\gamma/k_2)^2 & \gamma \\ \gamma & k_2^2 \end{bmatrix},$$

а также матричный линейный интегральный оператор $K = \|K_{mn}\|_{m,n=1}^2$, связанный с системой (26):

$$K\mathbf{g} = \int_0^R K(\rho, r) \mathbf{g}(\rho) d\rho,$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$.

Тогда система интегральных уравнений может быть записана в операторном виде

$$\mathbf{u} = aK(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) - aJ(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \quad (27)$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, $J = \frac{k_0^2}{k_2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Отметим, что операторы K, J являются линейными.

Будем рассматривать уравнение (27) в пространстве непрерывных функций $C[0, R] = C[0, R] \times C[0, R]$ с нормой $\|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$.

5. Исследование ядер интегральных операторов

Используя свойства функций Бесселя и Неймана, легко проверить, что функции $k_{11}(\rho, r)$ и $k_{22}(\rho, r)$ непрерывны в прямоугольнике $\bar{P} = [0, R] \times [0, R]$. Функции $k_{12}(\rho, r)$ и $k_{21}(\rho, r)$ ограничены в $\bar{P}$ и непрерывны в $\bar{T}^+ \setminus \{0\}$ и в $\bar{T}^- \setminus \{0\}$, где

$$\bar{T}^+ = \{(\rho, r) \in \bar{\Pi}, \rho \geq r\}, \bar{T}^- = \{(\rho, r) \in \bar{\Pi}, \rho \leq r\}.$$

В проверке нуждается только поведение функций $k_{11}(\rho, r)$, $k_{22}(\rho, r)$, $k_{12}(\rho, r)$ и $k_{21}(\rho, r)$ в нуле. Вычислим пределы функции Грина и ее производных при $r \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$. При $x \rightarrow 0$ имеем

$$N_0(x) \sim -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x}, \quad N_0'(x) \sim \frac{2}{\pi x}, \quad J_0(x) \sim 1, \quad J_0'(x) \sim -\frac{x}{2}.$$

Функция Грина имеет вид (19), тогда

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} G \rho \Big|_{\rho \leq r} = 0, \quad \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} G \rho \Big|_{r \leq \rho} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{\rho \leq r} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2 J_0(k_2 \rho) \left(N_0'(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0'(k_2 r) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} \cdot \rho \Big|_{\rho \leq r} \sim \frac{\rho}{r} \leq 1, \text{ при } r \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r \leq \rho} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2 J_0'(k_2 r) \left(N_0(k_2 \rho) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \rho \Big|_{r \leq \rho} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho \leq r} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2 J_0'(k_2 \rho) \left(N_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 r) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\partial G}{\partial \rho} \cdot \rho \Big|_{\rho \leq r} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{r \leq \rho} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2 J_0(k_2 r) \left(N_0'(k_2 \rho) J_0(k_2 R) - J_0'(k_2 \rho) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\partial G}{\partial \rho} \cdot \rho \Big|_{r \leq \rho} = 1.$$

Для вторых производных находим

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r} \Big|_{\rho \leq r} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2^2 J_0'(k_2 \rho) \left(N_0'(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0'(k_2 r) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r} \cdot \rho \bigg|_{\rho \leq r} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r} \bigg|_{r \leq \rho} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{J_0(k_2 R)} \cdot k_2^2 J_0'(k_2 r) \left(N_0'(k_2 \rho) J_0(k_2 R) - J_0'(k_2 \rho) N_0(k_2 R) \right);$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r} \cdot \rho \bigg|_{r \leq \rho} = 0.$$

Вычисленные пределы доказывают указанные выше свойства ядер интегральных операторов.

Перечисленные свойства ядер позволяют утверждать [9] ограниченность оператора $K: C[0, R] \rightarrow C[0, R]$. Очевидно, что оператор $J: C[0, R] \rightarrow C[0, R]$ также ограничен.

6. Итерационный метод решения системы интегральных уравнений и численные результаты

Приближенные решения $u_1^n(r)$, $u_2^n(r)$ системы интегральных уравнений (26) могут быть определены с помощью итерационного процесса метода сжимающих отображений:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1}(r) = & -\frac{a\gamma^2}{\varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial^2 G(r, \rho)}{\partial r \partial \rho} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) d\rho - \\ & -\frac{a\gamma}{\varepsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_2^n(\rho) d\rho - \frac{ak_0^2}{k_2^2} \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) + h_1(r); \\ u_2^{n+1}(r) = & -\frac{a\gamma}{\varepsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial \rho} \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_1^n(\rho) d\rho - \\ & -\frac{ak_2^2}{\varepsilon_2} \int_0^R G(r, \rho) \rho \left| \mathbf{u}^n(\rho) \right|^2 u_2^n(\rho) d\rho + h_2(r). \end{aligned} \quad (28)$$

Последовательность $u_1^n(r)$, $u_2^n(r)$ равномерно сходится к решению системы уравнений (26) вследствие того, что правая часть системы уравнений (28) определяет сжимающий оператор. Точнее, верна

Теорема 1. Пусть $B_{r_0} \equiv \{ \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0 \}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле и выполнены два условия:

$$q := 3|a|r_0^2 \|K - J\| < 1; \quad (29)$$

$$|a|r_0^3 \|K - J\| + \|h\| \leq r_0. \quad (30)$$

Тогда существует и единственно решение $u \in B_{r_0}$ уравнения (27), и последовательность приближенных решений u^n системы уравнений (27), определяемых посредством итерационного алгоритма

$$u^{n+1} = aK\left(|u^n|^2 u^n\right) - aJ\left(|u^n|^2 u^n\right) + h \quad (31)$$

(или (28)), сходится в норме пространства $C[0, R]$ к (единственному) точному решению $u \in B_{r_0}$ системы уравнений при любом начальном приближении $u^0 \in B_{r_0}$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q .

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение $u = A(u)$ с нелинейным оператором $A(u) \equiv aK(|u|^2 u) - aJ(|u|^2 u) + h$ в пространстве $C[0, R]$.

Пусть $u, v \in B_{r_0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A(u) - A(v)\| &= |a| \left\| K(|u|^2 u - |v|^2 v) - J(|u|^2 u - |v|^2 v) \right\| \leq \\ &\leq 3|a| \|K - J\| r_0^2 \|u - v\|. \end{aligned} \quad (32)$$

Из оценок (29) и (32) следует, что оператор A является сжимающим в шаре B_{r_0} .

Так как

$$\|A(u)\| = \left\| aK(|u|^2 u) - aJ(|u|^2 u) + h \right\| \leq |a|r_0^3 \|K - J\| + \|h\|,$$

то при выполнении условия (30) оператор A отображает шар B_{r_0} в себя. Тогда все утверждения теоремы следуют из принципа сжимающих отображений [9]. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что выбрав достаточно большой радиус шара r_0 , чтобы выполнялась оценка $\|h\| < r_0$, а потом выбрав достаточно малое $|a|$, можно удовлетворить оценкам (29) и (30).

Для получения численных результатов решалась система интегральных уравнений при $\gamma_j = \gamma_0 + jh_0$, $j = 0, \dots, N-1$ с некоторым (достаточно мелким) шагом h_0 . Затем вычислялось значение $\Delta(\gamma_j)$ и определялись отрезки перемены знака $\Delta(\gamma_j)$. На каждом отрезке значение локализованного корня уравнения $\Delta(\gamma) = 0$ уточнялось методом дихотомии.

На рис. 1 представлены результаты расчетов в графическом виде.

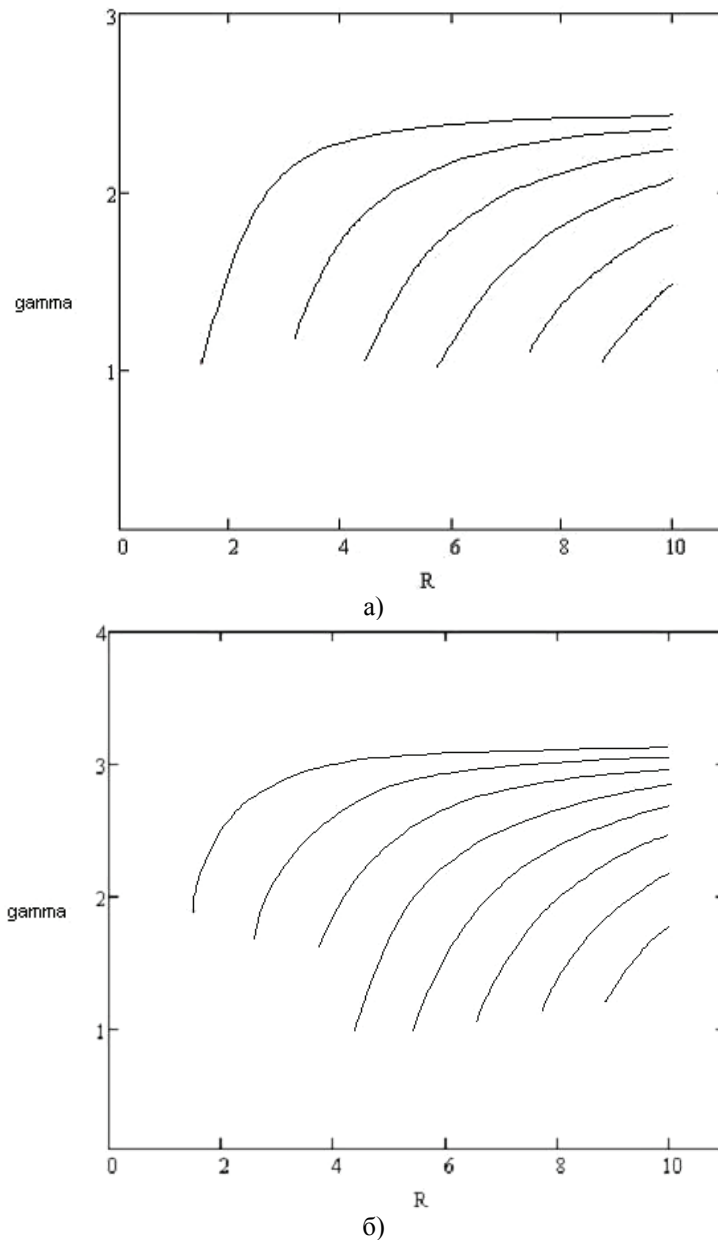


Рис. 2. Зависимость постоянных распространения γ от радиуса волновода. Выбор параметров: диэлектрическая проницаемость среды вне волновода $\epsilon_1 = 1$; радиус волновода $1,5 \leq R \leq 10$; волновое число свободного пространства $k_0 = 1$; диэлектрическая проницаемость среды внутри волновода $\epsilon_2 = 6$ (а), $\epsilon_2 = 10$ (б); коэффициент нелинейности $\alpha = 0,1$ (а), $\alpha = 0,01$ (б)

Список литературы

1. **Eleonskii, V. M.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / V. M. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Численный метод в задаче о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нели-

- нейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Известия высших учебных заведений Поволжский регион. – 2003. – № 6. – С. 29–42. – (Естественные науки).
3. **Никольский, В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – М. : Наука, 1978.
 4. **Schurmann, H.-W.** Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides / H.-W. Schurmann, Y. Smirnov, Y. Shestopalov // Physical Review E. – 2005. – Т. 71. – № 1. – Р. 016614-1–016614-10.
 5. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 10. – С. 1850–1860.
 6. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2006. – № 5. – С. 106–114. – (Естественные науки).
 7. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968.
 8. **Zeidler, E.** Applied Functional Analysis / E. Zeidler. – Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
 9. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1993.

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physico-mathematical sciences,
professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Хорошева Эльвира Александровна

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Chorosheva Elvira Alexandrovna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.9

Медведик, М. Ю.

Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 2–13.